Don Quijotes Kampf gegen Windmühlen, Teil 3:
Ist-Leistung einmal anders berechnet

Berechnung der Ist-Leistung einer WKA in Langenfeld anhand physikalischer Daten.

Ein Beitrag von Andreas Lobb

Wie bereits im Artikel „Wie hoch ist die zu erwartende Leistung einer WKA in Langenfeld?“ beschrieben, liegt die zu erwartende Leistung einer WKA im Raum Langenfeld bei ca. 2,0 bis 2,5 GWh pro Jahr.

Zur Überprüfung dieser Aussage benötigt man insgesamt vier Angaben und ein wenig technischen Sachverstand:

1. Die zu erwartenden Windgeschwindigkeiten
   => Quelle: Energieatlas NRW
   Es ist mit Windgeschwindigkeiten von 5,50 bis 5,75 m/s zu rechnen.
2. Den Wirkungsgrad der WKA
   => Quelle: Herstellerangaben (hier: Enercon)
   Bei Windgeschwindigkeiten von 5,50 bis 5,75 m/s beträgt der Leistungsbeiwert 45 %
3. Die Rotorfläche der WKA
   => Quelle: Herstellerangaben (hier: Enercon)
   Die Rotorfläche einer Enercon E-82 beträgt 5281 m²
4. Die Dichte der Luft
   => Quelle: Wikipedia
   Bei 20 °C beträgt die Dichte der Luft 1,2014 kg/m³
   Bei 0 °C beträgt sie 1,2920 kg/m³

Zur näheren Erläuterung unternehmen wir einmal einen kleinen Ausflug in die Physik!

Wie wir alle wissen ist Energie das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Schließlich ist es ja ein Unterschied, ob einem ein 100 g oder 1000 g schwerer Hammer auf den Fuß fällt. In dieser Denkweise versteckt sich die Masse in der Dichte der Luft. Bei einer Temperaturerwärmung dehnt sich die Luft aus und wird leichter. Physiker würden sagen: „Die Dichte sinkt!“. Wenn nun der Luft Masse fehlt, fehlt ihr kinetische Energie. Hierdurch kann sie nun weniger Arbeit verrichten.

Zur Berechnung der Leistung einer WKA wird zunächst die Leistungsdichte der Luft berechnet:

- im schlechtesten Fall (worst-case) bei 20 °C
  $1{,}20\ kg/m^3 * 0{,}5 * 5{,}50^3\ m^3/s^3 \quad = \quad 99{,}8\ kg/s^3 =$ **99,8 W/m²**
- im besten Fall (best-case) bei 0 °C
  $1{,}29\ kg/m^3 * 0{,}5 * 5{,}75^3\ m^3/s^3 \quad = \quad 122{,}6\ kg/s^3 =$ **122,6 W/m²**

Mit knappen 125 W/m² bläst nun der Langenfelder Wind auf den Rotor mit einer Fläche von 5281 m². Die Produkte von Leistungsdichte und Rotorfläche ergeben somit:

- im schlechtesten Fall (worst-case) bei 20 °C
  $99{,}8\ W/m^2 * 5281\ m^2 \quad =$ **527,0 kW**
- im besten Fall (best-case) bei 0 °C
  $122{,}6\ W/m^2 * 5281\ m^2 \quad =$ **647,5 kW**

Physikalisch unterliegt die Leistungsgewinnung durch Windkraftwerke dem Betzschen Gesetz (Erläuterung Wikipedia). Hiernach können maximal 59,3 % der Energie des Windes nutzbringend verwendet werden. Ein Blick in die Herstellerunterlagen zeigt hier, dass die WKA bei den hiesigen Windgeschwindigkeiten nahezu optimal arbeiten. Der Leistungsbeiwert beträgt ca. 45 %. Das bedeutet, dass 45 % der Windenergie genutzt werden können. Ein kleiner Nebeneffekt dieses hohen Leistungswertes ist, dass der Wind vor der WKA mit 5,5 m/s weht, dahinter aber nur noch mit 55 % und somit 3 m/s! Somit berechnet sich die Leistung wie folgt:

- ⇨ im schlechtesten Fall (worst-case) bei 20 °C
  527,0 kW * 45 % = **237,2 kW**
- ⇨ im besten Fall (best-case) bei 0 °C
  647,5 kW * 45 % = 291,4 **kW**

Während eines Jahres mit 8760 Stunden summieren sich diese Werte auf 2077,9 kWh/a und 2552,7 kWh/a. **Wenn ich diese runde komme ich auf 2,1 GWh/a und 2,6 GWh/a. Diese Werte sind jeweils um 0,1 GWh/a höher als die im anderen Artikel genannten Energiemengen.**

Formelsammlung:

Ableitung der Berechnungsformel zur Bestimmung der Energieleistungsdichte:

Die Wegstrecke, die die Luft benötigt, um das Windrad zu bewegen, kann aus der Windgeschwindigkeit und einer beliebigen Zeit abgeleitet werden.

Weg	=	Geschwindigkeit * Zeit
s	=	v * t
m	=	m/s * s

Wenn ich nun das Produkt aus Rotorfläche und dieser Wegstrecke bilde, erhalte ich das Gasvolumen, welches das Windrad antreibt.

Volumen	=	Rotorfläche * Weg
V	=	A * s
m^3	=	m^2 * m

zusammen ergibt sich:

Volumen	=	Rotorfläche * Geschwindigkeit * Zeit
V	=	A * v * t
m^3	=	m^2 * m/s * m

Die für die Energieberechnung wichtige Masse kann aus dem Volumen und der Dichte hergeleitet werden.

Masse	=	Volumen * Dichte
m	=	V * ρ
kg	=	m^3 * kg / m^3

Eingesetzt in die vorletzte Formel ergibt sich:

Masse	=	Rotorfläche * Geschwindigkeit * Zeit * Dichte
m	=	A * v * t * ρ
kg	=	m^2 * m/s *s * kg / m^3

Jetzt fehlt nur noch die Formel zu Berechnung der kinetischen Energie:

kinetische Energie	=	0,5 * Masse * Geschwindigkeit ^{2}
E	=	0,5 * m * v^2
kg * m^2 / s^2	=	kg * $(m/s)^2$

In der gleichen Vorgehensweise setze ich die vorherige Formel wieder in die letzte Gleichung ein:

kinetische Energie	=	0,5 * Rotorfläche * Geschwindigkeit * Zeit * Dichte * Geschwindigkeit ^{2}
E	=	0,5 * A * v * t * ρ * v^2
kg * m^2 / s^2	=	m^2 * m/s *s * kg / m^3 * $(m/s)^2$

Zur Leistungsermittlung fehlt jetzt nur noch der Bezug zur Zeit:

Leistung	=	Energie / Zeit
P	=	E / t
$kg * m^2 / s^3$	=	$kg * m^2 / s^2 / s$

Zum Schluss erhält man ein kürzbares Konstrukt:

Leistung	=	0,5 * Rotorfläche * Geschwindigkeit * Zeit * Dichte * Geschwindigkeit ² / Zeit
P	=	$0{,}5 * A * v * t * \rho * v^2 / t$
$kg * m^2 / s^3$	=	$m^2 * m/s * s * kg / m^3 * (m/s)^2 / s$

Aus dieser Gleichung kürzt sich die Zeit heraus und die Geschwindigkeit Kubik zurück:

Leistung	=	0,5 * Rotorfläche * Dichte * Geschwindigkeit ³
P	=	$0{,}5 * A * \rho * v^3$
$kg * m^2 / s^3$	=	$m^2 * kg / m^3 * (m/s)^3$